TGE **BAC BLANC : MATHEMATIQUES**

Jeudi 15 mars 2007
Durée : 4h

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le formulaire est autorisé ainsi que la calculatrice
Le sujet comporte deux pages.

Exercice I

1/ Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$z^2 - 4z + 16 = 0$$

2/ Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 1 cm, on considère le point A d'affixe $a = 2 + 2i\sqrt{3}$ et le point B d'affixe $b = \bar{a}$, où $\bar{a}$ désigne le nombre complexe conjugué de a

a) Ecrire les nombres complexes a et b sous forme trigonométrique.

b) Placer avec précision les points A et B dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.

3/ On considère les nombres complexes définis par :

$c = -4$ et $d = -1 + i\sqrt{3}$.

a) Calculer le module et un argument de chacun de ces nombres complexes.

b) Placer dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$ les points C et D d'affixes c et d.

4/ a) Démontrer que les points A, B et C appartiennent à un même cercle de centre O.

b) Démontrer que D est le milieu du segment [AC].

c) Démontrer que le triangle BDA est rectangle.

d) Démontrer que le triangle ABC est équilatéral.

5/ On appelle A' l'image du point A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et on note a' l'affixe du point A'

a) Déterminer le module et un argument du nombre complexe a'.

b) Ecrire le nombre complexe a' sous forme algébrique.

c) Placer le point A' dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Exercice II

Un moteur électrique possédant les bornes B_1, B_2 et B_3 doit être alimenté en électricité par trois fils F_1, F_2 et F_3 , chaque fil étant relié à une seule borne identifiée.

Lorsque les trois fils sont convenablement branchés (F_1 avec B_1 , F_2 avec B_2 , F_3 avec B_3), le moteur tourne à 1000 tours par minute.

Lorsqu'un seul des trois fils est branché à la bonne borne (les deux autres fils étant inversés), le moteur tourne à 500 tours par minute.

Lorsqu'aucun des trois fils n'est branché à la bonne borne, le moteur ne tourne pas.

On a perdu le schéma de montage et les fils sont indiscernables.

1/ Déterminer la liste des 6 montages possibles. (il n'est pas demandé d'arbre ni de tableau)

2/ Calculer la probabilité que les trois fils soient convenablement branchés.

3/ Calculer la probabilité qu'un seul des trois fils soit branché à la bonne borne (les deux autres fils étant inversés).

4/ On considère la variable aléatoire X qui, à chaque montage, associe la vitesse de rotation du moteur.
a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
b) Calculer l'espérance mathématique E(X) de la variable aléatoire X. Que représente-t-elle ?
d) Calculer la variance V(X) de la variable aléatoire X. En déduire l'écart type.

<u>Problème</u>
Partie A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $g(x) = \ln x - 1 - \frac{9}{2}x^2$.

1/ a) Calculer $g'(x)$ et étudier son signe sur $]0;+\infty[$.
b) Dresser le tableau de variations de g (sans les limites).
2/ En déduire que, pour tout réel x appartenant à $]0;+\infty[$, $g(x)$ est strictement négatif.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = -9x + 5 - 2\frac{\ln x}{x}$.

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan ayant pour unités graphiques : 5 cm pour l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.
1/ a) Etudier la limite de la fonction f lorsque x tend vers 0. En déduire l'existence d'une asymptote que l'on précisera.
b) Etudier la limite de la fonction f lorsque x tend vers $+\infty$.
c) Démontrer que pour tout x appartenant à $]0;+\infty[$, $f'(x) = \frac{2g(x)}{x^2}$. En déduire le signe de $f'(x)$ sur $]0;+\infty[$ et dresser le tableau de variations de f sur $]0;+\infty[$.
2/ a) Soit D la droite d'équation $y = -9x + 5$. On considère la fonction h définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x) = f(x) - (-9x + 5)$.
Démontrer que D est asymptote à la courbe C.
b) Calculer les coordonnées du point d'intersection de C et D.
c) Etudier la position de C par rapport à D.
3/ a) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C au point A d'abscisse 1.
b) Tracer dans le repère considéré la tangente T, les asymptotes et la courbe C.
4/ Démontrer qu'il existe un seul réel α de l'intervalle $\left[\frac{1}{2};1\right]$ tel que $f(\alpha) = 0$. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Partie C

1/ Montrer que la fonction L définie sur $]0;+\infty[$ par $L(x) = (\ln x)^2$ est une primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction l définie par $l(x) = 2\frac{\ln x}{x}$.
En déduire les primitives de f sur $]0;+\infty[$
2/ Déterminer la primitive de f qui s'annule quand x vaut 1.