Bac blanc TS
Correction

Exercice I (Spé)

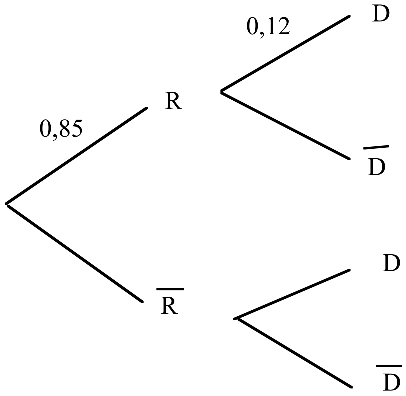
1/ Démontrons par récurrence que $5x_n - y_n + 3 = 0$ pour tout entier naturel n.
$5x_0 - y_0 + 3 = 5 - 8 + 3 = 0$. La propriété est donc vraie au rang n=0.
Supposons que la propriété est vraie jusqu'au rang n, on a donc $5x_n - y_n + 3 = 0$.
Montrons que $5x_{n+1} - y_{n+1} + 3 = 0$.
Or $5x_{n+1} - y_{n+1} + 3 = 5(\frac{7}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + 1) - (\frac{20}{3}x_n + \frac{8}{3}y_n + 5) + 3 = 5x_n - y_n + 3 = 0$.
Ainsi pour tout entier naturel n, $5x_n - y_n + 3 = 0$ c'est à dire $y_n = 5x_n + 3$. Donc les points M_n de coordonnées $(x_n ; y_n)$ sont sur la droite dont une équation est $5x - y + 3 = 0$.
On a donc $x_{n+1} = \frac{7}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + 1 = \frac{7}{3}x_n + \frac{1}{3}(5x_n + 3) + 1 = 4x_n + 2$.
2/ Démontrons par récurrence que x_n est un entier naturel pour tout entier naturel n.
$x_0 = 1$ est un entier naturel.
Supposons que la propriété est vraie jusqu'au rang n, on a donc x_n est un entier naturel.
Montrons que x_{n+1} est un entier naturel.
Or $x_{n+1} = 4x_n + 2$ de plus 4, 2 et x_n sont des entiers naturels donc x_{n+1} est un entier naturel.
La propriété est donc démontrée.
On sait que $y_n = 5x_n + 3$ avec x_n un entier naturel, donc y_n est aussi un entier naturel.
3°a/ $y_n = 5x_n + 3$. Si 3 divise x_n alors 3 divise $y_n = 5x_n + 3$.
Réciproquement si 3 divise y_n alors 3 divise $5x_n = y_n - 3$. Or 3 et 5 sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Gauss 3 divise x_n.
Conclusion: x_n est divisible par 3 ssi y_n est divisible par 3.
b/ Soit $d = PGCD(x_n ; y_n)$, d divise x_n et y_n donc d divise $y_n - 5x_n = 3$. Ainsi d=1 ou d=3.
Si l'on suppose que x_n et y_n ne sont pas divisibles par 3 alors d=1, donc ils sont premiers entre eux.
4°a/ Démontrons par récurrence que $x_n = \frac{1}{3}(4^n \times 5 - 2)$ pour tout entier naturel n.
On a bien $x_0 = \frac{1}{3}(4^0 \times 5 - 2) = 1$.
Supposons que la propriété est vraie jusqu'au rang n, on a donc $x_n = \frac{1}{3}(4^n \times 5 - 2)$.
Montrons que $x_{n+1} = \frac{1}{3}(4^{n+1} \times 5 - 2)$.
On a donc $x_{n+1} = 4x_n + 2 = 4 \times \frac{1}{3}(4^n \times 5 - 2) + 2 = \frac{1}{3}(4^{n+1} \times 5 - 8 + 6) = \frac{1}{3}(4^{n+1} \times 5 - 2)$.
La propriété est donc démontrée.
b/ On a donc $3x_n = 4^n \times 5 - 2$, avec x_n un entier, donc 3 divise $4^n \times 5 - 2$ pour tout entier naturel n.

Exercice I (non spé)

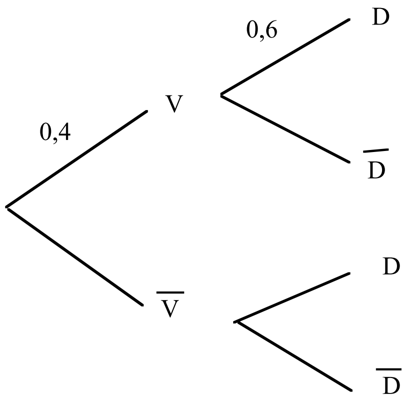
1/ $u_1 = \frac{3}{4}$.
$$u_2 = \frac{2 \times \frac{3}{4} + 3}{\frac{3}{4} + 4} = \frac{\frac{9}{2}}{\frac{19}{4}} = \frac{9}{2} \times \frac{4}{19} = \frac{18}{19}.$$
2/ Soit P la propriété : “$u_n > 0$ pour $n \geq 1$”.
P est vraie au rang 1 car $u_1 = \frac{3}{4}$.
Supposons P vraie jusqu'au rang *n* ainsi $u_n > 0$ et montrons que P est vraie au rang $n+1$ c'est à dire $u_{n+1} > 0$.
On a $u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4}$ or $u_n > 0$ donc $2u_n + 3 > 0$ et $u_n + 4 > 0$ d'où $u_{n+1} > 0$.
P est donc vraie au rang *n*+1, P est toujours vraie.
3/ a) pour tout naturel *n*, $u_{n+1} - 1 = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4} - 1 = \frac{2u_n + 3 - u_n - 4}{u_n + 4} = \frac{u_n - 1}{u_n + 4}$, de plus $u_n + 4 > 0$ donc $u_{n+1} - 1$ a le signe de $u_n - 1$.
Par récurrence immédiate, $u_{n+1} - 1$ a le signe de $u_0 - 1$ or $u_0 - 1 = -1 < 0$ donc pour tout naturel *n*, $u_n - 1 < 0$ c'est à dire $u_n < 1$.
b) pour tout naturel *n*,
$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4} - u_n = \frac{2u_n + 3 - u_n^2 - 4u_n}{u_n + 4} = \frac{-u_n^2 - 2u_n + 3}{u_n + 4} = -\frac{(u_n - 1)(u_n + 3)}{u_n + 4},$$
or $0 < u_n < 1$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$ c'est à dire $u_{n+1} > u_n$.
La suite (u_n) est donc croissante.
c) La suite (u_n) est croissante et majorée par 1, elle est donc convergente.
4/ a) pour tout naturel *n*, $v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 3} = \frac{\frac{2u_n + 3}{u_n + 4} - 1}{\frac{2u_n + 3}{u_n + 4} + 3} = \frac{u_n - 1}{5u_n + 15} = \frac{1}{5} \times \frac{u_n - 1}{u_n + 3} = \frac{1}{5}v_n$.
b) La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme $v_0 = -\frac{1}{3}$.
c) On a alors pour tout naturel *n*, $v_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n \times \left(-\frac{1}{3}\right)$
(v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et $-1 < \frac{1}{5} < 1$ donc (v_n) a pour limite 0.
d) (v_n) a pour limite 0 et $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$ donc (u_n) a pour limite 1.

Exercice II

1/ $p(R) = 0,85$
$p(D) = 0,20$
$p_R(D) = 0,12$
2/ On a l'arbre suivant :



a) $p(R \cap D) = p(R) \times p_R(D) = 0,85 \times 0,12 = 0,102$.
b) $p(R \cap \overline{D}) = p(R) \times p_R(\overline{D}) = 0,85 \times 0,88 = 0,748$.
c) On a $p(\overline{R} \cap D) + p(R \cap D) = p(D)$ car R et $\overline{R}$ forment une partition
donc $p(\overline{R} \cap D) = p(D) - p(R \cap D) = 0,2 - 0,102 = 0,098$.
d) De même $p(\overline{R} \cap \overline{D}) = p(\overline{R}) - p(\overline{R} \cap D) = 0,15 - 0,098 = 0,052$.
e) $p_D(R) = \dfrac{p(R \cap D)}{p(D)} = \dfrac{0,102}{0,2} = \dfrac{102}{200} = \dfrac{51}{100} = 0,51$.
3/ Soit V l'évènement "le dossier traité correspond à un excès de vitesse".
a)



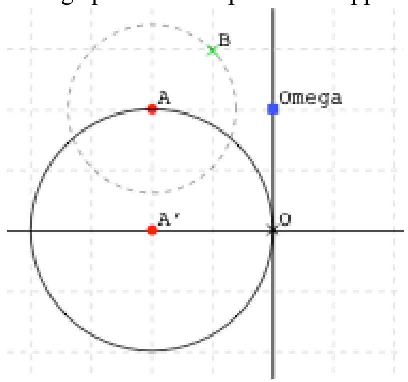
b) $p(V \cap D) = 0,4 \times 0,6 = 0,24$.
Considérons l'évènement contraire : aucun des cinq dossiers ne correspond à un excès de vitesse et entraîne des frais de dommages corporels, on a $p = \left(1 - p(V \cap D)\right)^5 = 0,76^5$
la probabilité cherchée est donc $1 - 0,76^5$ soit environ $0,746$.

Exercice III

1/ $z_{A'} = (1+i)(-2+2i) + 2 = -2 + 2i - 2i - 2 + 2 = -2$.
On a $z_A = (1+i)z_B + 2$ d'où $-2 + 2i = (1+i)z_B + 2$
soit $z_B = \dfrac{-4+2i}{1+i} = \dfrac{(-4+2i)(1-i)}{2} = \dfrac{-4+4i+2i+2}{2} = -1 + 3i$.
2/ a) ω vérifie $\omega = (1+i)\omega + 2$ soit $i\omega = -2$ c'est à dire $\omega = 2i$
il existe donc un unique point invariant et son affixe vaut $2i$.
b) pour tout nombre complexe $z \neq \omega$,
$\dfrac{z'-z}{\omega - z} = \dfrac{(1+i)z + 2 - z}{2i - z} = \dfrac{iz+2}{2i-z} = \dfrac{i(z-2i)}{2i-z} = -i$.
On a $\left|\dfrac{z'-z}{\omega-z}\right| = |-i| = 1$ or $\left|\dfrac{z'-z}{\omega-z}\right| = \dfrac{|z'-z|}{|\omega-z|} = \dfrac{MM'}{M\Omega}$ d'où $MM' = M\Omega$.
De plus, $(\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MM'}) = \arg\left(\dfrac{z'-z}{\omega-z}\right) \quad (2\pi)$ or $\arg(-i) = -\dfrac{\pi}{2} \quad (2\pi)$

donc $(\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MM'}) = -\dfrac{\pi}{2} \quad (2\pi)$.
On a $MM' = M\Omega$ donc M' appartient au cercle de centre M et de rayon $M\Omega$

et $(\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MM'}) = -\dfrac{\pi}{2} \quad (2\pi)$ donc le triangle $M\Omega M'$ est rectangle en M et le point M' appartient donc à la perpendiculaire à la droite $(M\Omega)$ passant par M puis "respect de l'angle orienté".
3/ a) on a $|z + 2 - 2i| = \sqrt{2}$ ssi $|z - (-2+2i)| = \sqrt{2}$ ssi $|z - z_A| = \sqrt{2}$ ssi $AM = \sqrt{2}$
Γ est donc le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.
$AB = |-1 + 3i - (-2+2i)| = |1+i| = \sqrt{2}$.
b) pour tout nombre complexe z, $z' + 2 = (1+i)z + 2 + 2 = z + iz + 4$ et
$(1+i)(z + 2 - 2i) = z + 2 - 2i + iz + 2i + 2 = z + iz + 4$
on a donc $z' + 2 = (1+i)(z + 2 - 2i)$.
Si $M \in \Gamma$, $|z + 2 - 2i| = \sqrt{2}$, de plus $|1+i| = \sqrt{2}$
on a alors $|z' + 2| = 2$ soit $A'M = 2$
l'image par F de tout point de Γ appartient donc au cercle Γ' de centre A' et de rayon 2.



Exercice IV

1/ Pour tout x réel, $g'(x) = 2e^{2x} + 2(2x-1)e^{2x} = 4xe^{2x}$

de plus, pour tout x réel, $4e^{2x} > 0$, ainsi

- si $x > 0$, $g'(x) > 0$ et g est croissante sur $[0;+\infty[$
- si $x < 0$, $g'(x) < 0$ et g est décroissante sur $]-\infty;0[$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g'(x)		-	0	+	
g		↘	0	↗	

le minimum est 0 donc pour tout réel x, $g(x) \geq 0$.

2/ a) $1 - g(x) \geq 0$ ssi $-(2x-1)e^{2x} \geq 0$ or pour tout réel x, $e^{2x} > 0$

donc $1 - g(x) \geq 0$ ssi $-(2x-1) \geq 0$ ssi $1 - 2x \geq 0$ ssi $\frac{1}{2} \geq x$.

On a $S = \left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$.

b) $I = \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - g(x))dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (1-2x)e^{2x}dx$.

on considère : $\begin{cases} u(x) = 1 - 2x \\ v'(x) = e^{2x} \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(x) = -2 \\ v(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$

et alors

$$I = \left[\frac{1}{2}(1-2x)e^{2x}\right]_0^{\frac{1}{2}} + \int_0^{\frac{1}{2}} e^{2x}dx$$

$$= -\frac{1}{2} + \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}e - 1$$

c) On a $1 - g(x) \geq 0$ sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ donc I représente l'aire du domaine délimité par la courbe représentative de g, la droite d'équation $y = 1$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \frac{1}{2}$.

Partie B

On considère la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{x} & x \neq 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}$. On admettra que la fonction f est continue en 0.

1/ a) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ car $f(x) = \frac{e^x(e^x - e^{-x})}{x}$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$; $\lim_{x \to +\infty} (e^x - e^{-x}) = +\infty$.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ car $\lim_{x \to -\infty} e^{2x} = 0$ et $\lim_{x \to -\infty} (e^{2x} - 1) = -1$.

b) La courbe représentative de f admet donc une asymptote d'équation $y = 0$.

2/ Pour tout x réel non nul, $f'(x) = \frac{2e^{2x} \times x - (e^{2x} - 1)}{x^2} = \frac{(2x-1)e^{2x} + 1}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$. On a ainsi $f'(x)$ du signe de $g(x)$ d'où le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'(x)		+	‖	+	
f	0	↗	2 ‖ 2	↗	$+\infty$

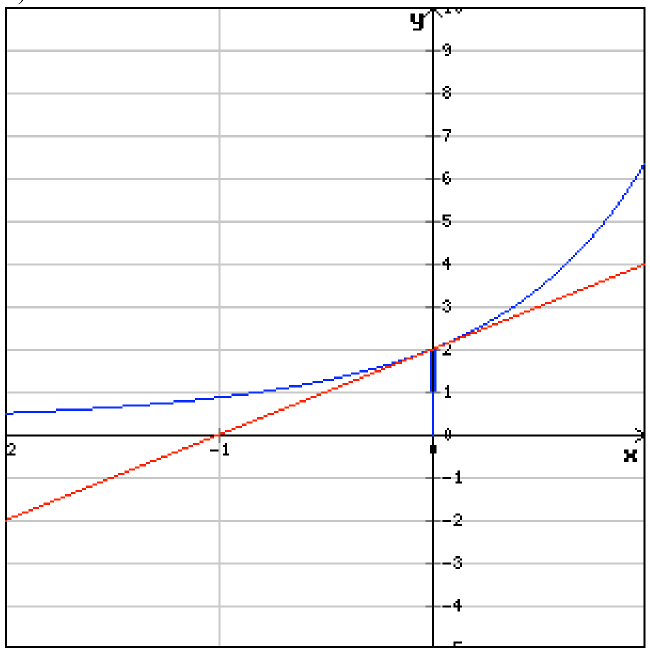
la continuité de f en 0 permet ainsi de dire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3/ Soit C la courbe représentative de la fonction f dans le repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unités : 4 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées)

a)

x	-2	-1,5	-1	-0,5	-0,2	-0,1	-0,05	0,05	0,1	0,2	0,5	1
$f(x)$	0,49	0,63	0,86	1,26	1,65	1,81	1,90	2,10	2,21	2,46	3,44	6,39

b)



4/ La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$. On peut déterminer graphiquement une valeur approchée du nombre dérivé $f'(0)$ en lisant le coefficient directeur de la tangente (voir graphique), celui-ci semble valoir 2.

On peut donc conjecturer que $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 2$ c'est à dire $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 2}{x} = 2$

Exercice V : QCM

1/ L'image dans le plan complexe du nombre complexe $z=(1+i)^{2015}$ appartient à :

- ☐ l'axe réel
- ☐ l'axe des imaginaires purs
- ☐ la droite d'équation $y=x$
- ■ la droite d'équation $y=-x$

2/ Soient z_1, z_2, z_3 les solutions complexes de l'équation $(z-3)(z^2-(6+2\sqrt{3})z+13+6\sqrt{3})=0$. On considère M_1, M_2, M_3 les images respectives dans le plan complexe de z_1, z_2, z_3. Le triangle $M_1M_2M_3$ est :

- ☐ rectangle non isocèle
- ☐ isocèle non équilatéral
- ■ équilatéral
- ☐ autre

3/ Pour toutes fonctions f et g dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{1} g(x)dx$, on a :

- ☐ $f=g$ sur $[-1;1]$
- ☐ $f'=g'$ sur $[-1;1]$
- ☐ $\int_{0}^{1} f(x)dx=\int_{0}^{1} g(x)dx$
- ■ autre

4/ Soit F la fonction définie pour tout réel x par $F(x)=\int_{0}^{x} f(t)dt$ avec pour tout réel t

$f(t)=2t\cos(2t+\frac{\pi}{3})$, on a :

- ■ $F\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}\pi}{12}-\frac{1}{2}$
- ☐ pour tout réel x, $F'(x)=-4\sin(2x+\frac{\pi}{3})$
- ☐ pour tout réel x, $F(x)=2x\cos(2x+\frac{\pi}{3})$
- ☐ pour tout réel x, $F'(x)=f'(x)$

Exercice VI

Pour tout entier naturel n, soient (u_n) et (v_n) deux suites satisfaisant les conditions suivantes:
- $u_0=0$ et $v_0=7$
- (u_n) est croissante
- (v_n) est décroissante
- $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$.

1/ Pour tout entier naturel n, $w_{n+1}-w_n=v_{n+1}-u_{n+1}-(v_n-u_n)=v_{n+1}-v_n-(u_{n+1}-u_n)$

or (v_n) est décroissante donc $v_{n+1}-v_n\le 0$ et (u_n) est croissante donc $u_{n+1}-u_n\ge 0$
on a ainsi $w_{n+1}-w_n\le 0$ la suite (w_n) est donc décroissante
on a également $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$ soit $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n=0$
en conclusion pour tout entier naturel n, $w_n\ge 0$ c'est à dire $u_n\le v_n$.

2/ On a pour tout naturel n, $u_0\le u_n\le v_n\le v_0$

(u_n) est convergente car (u_n) est croissante et majorée par $v_0=7$.
(v_n) est convergente car (v_n) est décroissante et minorée par $u_0=0$.
De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$ donc (u_n) et (v_n) ont même limite.